

Μαθηματικά προσανατολισμού

ΟΔΗΓΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ – ΒΙΒΛΙΟ ΜΑΘΗΤΗ

Μπάμπης Στεργίου - Χρήστος Νάκης

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : Τάκης Χρονόπουλος

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ : 2^{ος} ΚΥΚΛΟΣ (16-3-2018)

Θέματα 2.1 – 2.23

2.1. α) $f(1) = 3, f(2) = 6, f(3) = 0$

♦ $f \nearrow [0,2], \searrow [2,3]$

β) κυρτή $[0,1]$, κοίλη $[1,3]$, Σ.Κ. $(1,3)$

γ) 0

δ) Θ. Rolle για $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ στο $[1,2]$

ε) 6 τ.μ.

2.2. α) i) $B(\alpha - \alpha \ln \alpha, 0)$

ii) $E(\alpha) = \frac{1}{2} \alpha \ln^2 \alpha - \alpha \ln \alpha + \alpha - 1$ τ.μ.

β) i) $x'(t) = -\alpha(t) \ln \alpha(t)$

$x'(2) = -2e^2$ μονάδες μήκους / sec

ii) $\omega'(t) = -\frac{1}{\alpha(t)(1 + \varepsilon \varphi^2 \omega(t))}$

♦ $\omega'(2) = -\frac{e^2}{1+e^4}$ rad / sec

γ) i) $g(x) = x \ln^2 x - 4x \ln x + 4x - 4, x > 0$

♦ $g'(x) = \ln x (\ln x - 2)$

♦ μοναδική ρίζα x_1 της g , με $x_1 \in (e^2, +\infty)$

ii) $a(t) = e^t$, Θ. Bolzano για g στο $[e^2, e^3]$

2.3. α) $+\infty$ **β)** $-\infty$ **γ)** -3

δ) 0 **ε)** 0 **ζ)** 0

η) 0 με Κ.Π. **θ)** $+\infty$ **ι)** 1

κ) $+\infty$ **λ)** $-\infty$ **μ)** $-1/2$

ν) δεν υπάρχει (πλευρικά άνισα)

2.4. α) $A = \mathbb{R}^*$, $f(A) = \mathbb{R}$

β) όχι, διότι $f(-1) = f(1)$ με $-1 \neq 1$

γ) $f \nearrow (-\infty, 0), (0, 2], \searrow [2, +\infty)$

δ) δεν έχει αφού $f(A) = \mathbb{R}$

ε) ± 1

στ) i) 2 ii) 2 iii) 1

ζ) ♦ 3 ρίζες αν $\alpha \in (0,1)$

♦ 2 ρίζες αν $\alpha \leq 0$ ή $\alpha = 1$

♦ 1 ρίζα αν $\alpha > 1$

η) i) 0 ii) $+\infty$ iii) 0 με Κ.Π.

iv) $-\infty$ v) 0 vi) 0 με Κ.Π.

vii) 1 viii) δεν υπάρχει ix) 0

x) 1

2.5. α) i) 0 ii) $+\infty$ iii) 0 iv) $+\infty$

β) i) $+\infty$ ii) 1 iii) $+\infty$

γ) i) 1 ii) 0

2.6. α) $f \nearrow [-1,1], [4,8], f \searrow [1,4], [8,10]$

♦ Τ.Ε. όταν $x = -1, 4, 10$

♦ Τ.Μ. όταν $x = 1, 8$

β) κυρτή στα $[-1, 0], [2, 5], [6, 7]$,

κοίλη στα $[0, 2], [5, 6], [7, 10]$

Σ.Κ. όταν $x = 0, 2, 5, 6, 7$

γ) κυρτή στο $[-1, 0]$ με εφαπτομένη :

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

δ) $f'(2) - f'(0) = -2$

2.7. α) x_1, x_2 ρίζες της $f'(x)$ από Θ. Fermat,
οπότε $x_1 x_2 = P$ στο τριώνυμο της $f'(x)$

β) i) $f'(-1) = f'(1) = 0 \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 0$

ii) $f \nearrow (-\infty, -1], [1, +\infty) \searrow [-1, 1]$

♦ Τ.Μ. όταν $x = -1$, Τ.Ε. όταν $x = 1$

γ) i) $A=0$ με ΚΠ ii) $B=1$

2.8. α) ii) $\Pi'(x) = 2 \frac{x^2 - 900}{x^2}, x > 0$,

♦ Ο.Ε. όταν $x = y = 30$ m

β) ii) $E'(x) = 60 - 2x, 0 < x < 60$

♦ Ο.Μ. όταν $x = y = 30$ m

2.9. α) $T(x) = \frac{1600}{x} + x, x > 0$

β) $T'(x) = \frac{x^2 - 1600}{x^2}, x > 0$

♦ Ο.Ε. όταν $x = 40$ m, $y = 20$ m,

με τιμή $T(40) = 80$ m

2.10. α) $x + 4$ cm, $y + 10$ cm

β) $E(x) = 10x + \frac{1440}{x} + 400, x > 0$

γ) $E'(x) = 10 \frac{x^2 - 144}{x^2}, x > 0$

♦ Ο.Ε. όταν $x = 12$ cm, $y = 30$ cm

2.11. α) $S(\rho) = 2\pi\rho^2 + \frac{256\pi}{\rho}, \rho > 0$

β) $S'(\rho) = 4\pi \frac{\rho^3 - 64}{\rho^2}, \rho > 0$

♦ Ο.Ε. όταν $\rho = 4$ cm, $h = 8$ cm

γ) $S(4) = 96\pi$ cm²

2.12. α) $f(x) = \frac{\sqrt{36+x^2}}{8} + \frac{15-x}{10}, 0 \leq x \leq 15$

β) $f'(x) = \frac{x}{8\sqrt{36+x^2}} - \frac{1}{10}, 0 \leq x \leq 15$

♦ $f'(x) = \frac{36(x^2 - 64)}{80\sqrt{36+x^2}(10x + 8\sqrt{36+x^2})}$

♦ Ο.Ε. όταν $x=8$ km,

ΠΜ = 10 km, ΜΑ = 7 km

2.13. α) $K(v) = 540 \left(\frac{v}{400} + \frac{16}{v} \right), v > 0$

β) $K'(v) = 540 \frac{v^2 - 6400}{400v^2}, v > 0$

♦ Ο.Ε. όταν $v = 80$ km / h

γ) $K(80) = 216$ €

2.14. α) $y = \frac{1500}{x^2}, x > 0$

β) $A(x) = 3\lambda \left(x^2 + \frac{2000}{x} \right), x > 0$

όπου λ ο συντελεστής απώλειας

θερμότητας από τους τοίχους

γ) $A'(x) = 6\lambda \frac{x^3 - 1000}{x^2}, x > 0$

♦ Ο.Ε. όταν $x=10$ m, $y=15$ m

2.15. α) i) 72 cm² / s ii) 54 cm³ / s

β) i) $\frac{7}{3a^2(t)}$ ii) $\frac{28}{a(t)}$ iii) 14 cm² / s

2.16. α) $x = 20\sigma\upsilon\nu\varphi, \upsilon = 10\eta\mu\varphi$

$K = 1, \Lambda = 1/2$ $M = 0$

γ) i) -1 / 5 rad / s ii) 10 cm² / s

2.17. β) $-3 / \pi \text{ cm / s}$

γ) $-2 / 3\pi \text{ cm / s}$

2.18. α) 1 km **β)** -100 km / h

γ) $-55 \text{ km}^2 / \text{h}$ **δ)** -50 rad / h

2.19. α) $y = \sqrt{100 - x^2}$, $x(t_0) = 6 \text{ m}$

β) -3 m / s

γ) $E(t) = \frac{1}{2} x(t) \sqrt{100 - x^2(t)}$

δ) i) $E'(x) = \frac{50 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$

ii) $E'(t) = 4 \frac{50 - x^2(t)}{\sqrt{100 - x^2(t)}}$

ε) $7 \text{ m}^2 / \text{s}$

στ) $-1/2 \text{ rad / s}$

ζ) $5\sqrt{2} \text{ m}$

2.20. α) -4 μονάδες μήκους

β) $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$, $a(t) = 6t - 12$

γ) $1 \text{ min}, 3 \text{ min}$

δ) $t \in [0,1) \cup (3,5]$, $t \in (1,3)$

ε) 28 μονάδες μήκους

στ) $28 / 5$ μονάδες μήκους / min

ζ) $0 \text{ min}, 4 \text{ min}$

η) Απόσταση θέσεων για $t=0$ και $t=5$

2.21. α) $(1,2)$, $(-1,4)$

β) 2 cm / s

γ) 6 rad / s , -6 rad / s

2.22. α) i) $24\pi \text{ cm}^2 / \text{s}$ ii) $36\pi \text{ cm}^3 / \text{s}$

β) i) 2 cm ii) 1 cm / s

iii) $16\pi \text{ cm}^3 / \text{s}$

γ) i) $4/3 \text{ cm / s}$ ii) $32\pi \text{ cm}^2 / \text{s}$

2.23. β) $3/2 \text{ m / s}$

ΣΥΜΒΟΛΑ :

- ◆ ΟΜ : Ολικό μέγιστο
- ◆ ΤΜ : Τοπικό μέγιστο
- ◆ ΤΕ : Τοπικό ελάχιστο
- ◆ ΟΕ : Ολικό ελάχιστο
- ◆ ΣΚ : Σημείο καμπής
- ◆ ΚΠ : Κριτήριο παρεμβολής