Μαθηματικά προσανατολισμού

ΟΔΗΓΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ – ΒΙΒΛΙΟ ΜΑΘΗΤΗ

Μπάμπης Στεργίου - Χρήστος Νάκης

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : Τάκης Χρονόπουλος

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ : 1ος ΚΥΚΛΟΣ (29-3-2018)

Θέματα 1.1 – 1.50

1.1. α) i) 0 ii) 1

β) (ε_1) y = - x - 1 , (ε_2) y = x + 1

γ) f(x) > - x -1 για x< -1 & f(x) > x+1 για x > 0

δ) ♦ $f'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

♦ $f''(x)=\dfrac{1}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$

1.2. α) $\hat{AMN} \approx \hat{AB\Gamma}$ & $\hat{ANP} \approx \hat{AB\Delta}$

δ) $E'(x)=-4x+10$

Ο.Μ. όταν $x=5/2$, Ν μέσο του ΑΒ

1.3. α) $h'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$,

♦ $h\nearrow$, $h((0,+\infty))=\mathbb{R}$

γ) Θ. Bolzano για $\varphi(x)=(x-2)e^x+(x-1)\ln x$ στο [1,2]

δ) i) $A=-\infty$ ii) $B=+\infty$ iii) $\Gamma=+\infty$

1.4. α) $\hat{AMN} \approx \hat{ABE}$

γ) $E'(x)=\begin{cases} 2x\,, & 0<x\le 1 \\ 2\,, & 1<x\le 3 \end{cases}$, $E'(x)>0$

δ) x = 2, Μ μέσο του ΒΓ

1.5. α) $|g(x)|=\sqrt{x^2+1}$

β) $g(x)>0$

γ) ♦ $f'(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}>0$

♦ $f^{-1}(x)=\dfrac{x^2-1}{2x}$, $x>0$

δ) i) $D_h=R$ ii) $h'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

iii) $\eta\mu x<x \Leftrightarrow x>0$ iv) $h(R)=R$

1.6. α) $+\infty$ με Κ.Π. , 0, $+\infty$

β) i) 1 ii) $+\infty$

γ) $+\infty$

δ) i) 0 με Κ.Π. ii) δεν υπάρχει

ε) 0 με Κ.Π.

$$0<\frac{f(x)+g(x)}{f^4(x)+g^4(x)}\le\frac{1}{f^3(x)}+\frac{1}{g^3(x)}$$

στ) i) $+\infty$ ii) 1 με Κ.Π.

1.7. α) $|g(x)|=|x|$

β) g(x)< 0 για x > 0 & g(x)>0 για x < 0

γ) i) $A=3$ ii) $B=-\infty$

δ) Θ. Bolzano για h(x)=f(x)+1 στο [0,π]

1.8. α) (ΟΒ): y = x , (ΑΓ) : y = -x + 1

β) g(x)=f(x)+x-1, $g(0)g(1)\le 0$

δ) $0\le e^x f(x)\le e^x$

1.9. α) $|f(x)|=\sqrt{x^2+1}$

β) i) f(x)>0 ii) A=1 , B=0

iii) $\begin{cases} -\infty, & \alpha\nu\ \alpha>1 \\ +\infty, & \alpha\nu\ \alpha<1 \\ 0\ , & \alpha\nu\ \alpha=1 \end{cases}$ iv) θέτω x= -y

v) -2 vi) $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

- $f''(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$
- $f\nearrow(-\infty,0], f\searrow[0,+\infty)$, O.E. όταν x=0
- f κυρτή στο R , Σ.Κ. δεν έχει.

Ασύμπτωτες : y= -x στο $-\infty$, y= x στο $+\infty$

1.10 α) -2π / 3 , π / 3

β) θετική στα $\left(-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$

αρνητική στα $\left(-\pi,-\frac{2\pi}{3}\right),\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}\right),\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

γ) Θ. Bolzano για g(x) = εφx + 4x $-\sqrt{3}$ στο [0,π/4] και μονοτονία

δ) A=1, B δεν υπάρχει

1.11. α) $\kappa\pi-\pi/4$, $\kappa\in Z$

β) ♦ Θετική στα $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right),\left(\frac{7\pi}{4},2\pi\right]$

♦ Αρνητική στο $\left(\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$

♦ Μηδέν στα $\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$

γ) A=$-\infty$, B=0 με Κ.Π.

δ) π - 2

1.12. α) $h'(x)=e^x+\dfrac{1}{x^2}$,

$h\nearrow(-\infty,0),(0,+\infty)$, $h(R^*)=R$

γ) Θ. Bolzano για

$\varphi(x)=(x-2)e^x+(x-1)\ln x$ στο [1,2]

δ) $\begin{cases} e, & \alpha\nu\ \lambda>e \\ -\frac{1}{\lambda}, & \alpha\nu\ 0<\lambda<e \\ \frac{e-1}{e+1}, & \alpha\nu\ \lambda=e \end{cases}$

ε) i) A=+∞ ii) B=e

iii) Γ=e iv) Δ=1

1.13. α) Θ. Bolzano για $h(x)=\ln x-\frac{1}{x}$ στο [1,e] και μονοτονία στο $(0,+\infty)$

δ) 2 ln2

ε) $\left(1+\frac{1}{x_o}\right)e$ διότι $x_o^{x_o}=e$

1.14. α) $h'(x)=e^x+\dfrac{2}{x^2}$,

- $h\nearrow(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$, $h(\mathbb{R}^*)=\mathbb{R}$

γ) A(2α,0) , B(0,4/α)

i) M (α, 2 / α) ii) E = 4 τ.μ.

δ) y = ex , $E=\dfrac{e-2}{2}$ τ.μ.

ε) e^2

1.15. α) $|g(x)|=e^x$ με $g(x)=f(x)-x$

$g(x)>0$

β) $f'(x)=e^x+1$ ’ **γ)** $f(R)=R$

δ) 1-1 **ε)** $0\in f(R), f\nearrow R$

- Αρνητική για x < x_0, θετική για x > x_0

στ) x = 1 **ζ)** $x\le 1$

η) με άτοπο **θ)** x=0

Για x > 0 είναι $2^x<3^x$ …

ι) αδύνατη

κ) [2,3], $f(3x-x^2)\geq f(6-2x)$

λ) $\begin{cases} \dfrac{1}{\lambda} \;,\; \alpha\nu\ 0<\lambda<e \\ \dfrac{1}{e} \;,\; \alpha\nu\ \lambda\geq e \end{cases}$

1.16. α) f(0)=0

β) i) 6 ii) 2 iii) 5

ε) y=2x **στ)** f(x)=2ημx

1.17. α) π / 4, 5π /4

β) θετική στο $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$

αρνητική στα $\left[0,\frac{\pi}{4}\right),\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$

γ) i) $-\infty$ ii) 0 με Κ.Π.

δ) 0

1.18. β) $|f(x)|=|x|$, f(x) > 0 όταν x > 0,

f(x) < 0 όταν x < 0

γ) i) 1 ii) 1/2

iii) 1 iv) 0

1.19. α) μηδέν για x=0,

αρνητική για x < 0, θετική για x > 0

β) $f(x)=\begin{cases} e^x+x-1 \;,\; x\geq 0 \\ -e^x-x+1 \;,\; x<0 \end{cases}$

- $|f(x)|=|g(x)|$
- για x > 0 , f και g θετικές
- για x < 0 , f θετική και g αρνητική

γ) $+\infty$, $+\infty$ **δ)** όχι

ε) $f(x)=\begin{cases} e^x+1 \;,\; x>0 \\ -e^x-1 \;,\; x<0 \end{cases}$

$h \searrow (-\infty,0), \nearrow (0,+\infty)$ Ο.Ε. για x=0

1.20. α) $|f(x)|=\sqrt{4-x^2}$

γ) ημικύκλιο κέντρου Ο, ρ = 2, $x\geq 0$

i) Ι = 2π ii) J = π

1.21. α) $|f(x)|=\sqrt{1-x^2}$

γ) 1/2

δ) ημικύκλιο κέντρου Ο, ρ = 1, $x\geq 0$

ε) Ι= π /2

1.22. γ) y = x + 1

δ) i) 1 ii) 0 με Κ.Π

1.23. α) i) 2 ii) -1/2

β) i) 2 ii) 4

γ) y=2x

1.24. α) y= -x στο $-\infty$, y= x στο $+\infty$

β) $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$f''(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

γ) $f \searrow (-\infty,0], \nearrow [0,+\infty)$, f κυρτή στο R

δ) $I=\sqrt{2}-1$, $J=\dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}$

ε) Α= 0

1.25. β) y=3x-1

γ) i) 6 ii) 3 **δ)** $f(x)=x^3+1$

1.26. α) i) Ν(1,1) ii) x<0 ή x>1

iii) $f'(1)g'(1)=-1$

$f'(x)=2x \;,\; g'(x)=-\dfrac{1}{2x^2}$

β) $x_1^{\,2}-2x_o x_1-\frac{1}{4}=0$ με $\left(x_o,-\frac{1}{4}\right)\in y=-\frac{1}{4}$

και $(x_1,f(x_1))$ το σημείο επαφής , Δ > 0

- $f'(x_1)f'(x_2)=-1$

γ) i) y = 2x - 1, y= - 2x – 1 , Γ(0,-1)

ii) Ε = 2/3

1.27. α) i) f(0)=0, f΄(0)=1 ii) Ε = 2/3

iii) A=1 , B=1

β) f(0) = 0, f΄(0) = 1 , f(1) = 2, f΄(1) =3

1.28. β) i) 1 ii) +∞

γ) Θ. Bolzano για h(x)=f(x)–g(x) στο [0,π]

δ) $\sqrt[4]{e}$

1.29. α) $f(x)=e^{x\ln x}, x>0$.Είναι :

- $f'(x)=x^x(\ln x+1)$
- $f \searrow \left(0,\frac{1}{e}\right], \nearrow \left[\frac{1}{e},+\infty\right)$, Ο.Ε. για x=1/e

β) $f(x)\geq f\left(\frac{1}{e}\right)$

γ) όχι **δ)** όχι

ε) $f''(x)=x^x\left[(\ln x+1)^2+\frac{1}{x}\right]>0$

1.30. α) f(0)=0

β) -1 **γ)** 0

δ) Γράφουμε $\dfrac{f(x)-x}{x^2}\,\dfrac{f(x)+x}{x}$

1.31. α) $g'(x)=e^x-1$

$g\searrow(-\infty,0], \nearrow[0,+\infty)$, $g(R)=[0,+\infty)$

β) α=β=0 g(α)+ g(β)=0

γ) ii) $f(x)=\begin{cases} e^x-x-1\ , x\leq 0 \\ -e^x+x+1\ , \ x>0\end{cases}$

$|f(x)|=|g(x)|$

- για x <0 , f και g θετικές
- για x >0 , f αρνητική και g θετική

δ) i) 0 με Κ.Π. ii) 0

1.32. α) Θ. Bolzano για $h(x)=e^x-\frac{1}{x}$ στο διάστημα $\left[\frac{1}{2},1\right]$ και πλήθος ριζών στο $\mathbb{R}^*$

γ) i) $A=\dfrac{1+e^2}{1+e}$ ii) $B=+\infty$

ε) 0

1.33. β) όχι

γ) $f'(x)=\begin{cases}3(x-1)^2, x<2\\ 5(x-3)^4, x>2\end{cases}$, $f\nearrow R$

δεν έχει ακρότατα

δ) $f''(x)=\begin{cases}6(x-1), x<2\\ 20(x-3)^3, x>2\end{cases}$

- f κυρτή στα $[1,2],[3,+\infty)$,
- f κοίλη στα $(-\infty,1],[2,3]$,
- Σ.Κ. για x=1 και για x=3
- ασύμπτωτες δεν έχει

1.34. β) $f'(x)=\begin{cases}2x+2\ ,\ x<0\\ 2\ ,\ x\geq 0\end{cases}$

$f\searrow(-\infty,-1], \nearrow[-1,+\infty)$ Ο.Ε. για $x=-1$

γ) y=2x+2 **δ)** E= 13/3

1.35. α) (1,1)

β) ♦ f(x) > g(x) όταν 0< x <1

♦ f(x) < g(x) όταν x < 0 ή x > 1

γ) y= -x+2, y= x , $f'(1)g'(1)=-1$

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, $g'(x)=2x-1$,

δ) i) 1 ii) e

1.36. α) Θ. Fermat f΄(-1)=0

β) $f'(x)=3(x^2-1)$

- $f\nearrow(-\infty,-1],[-1,+\infty), \searrow[-1,1]$
- Τ.Μ. για x=-1, Τ.Ε. για x=1

γ) f΄΄(x) = 6x , Σ.Κ. για x=0

Α(-1,4), Β(1,0), Γ(0,2)

(ε): y= -2x + 2

δ) 1/2

ε) Α=+∞ , Β=1

1.37. α) $f'(x)=e^x$, $y=x+1$

β) $g'(x)=-2x-1$, σημείο επαφής (-1,0)

γ) $E=\dfrac{e^2-2e-1}{e}$

δ) $x_1^2-2x_ox_1-\dfrac{1}{2}-x_o=0$

με $\left(x_o,\dfrac{1}{2}\right)\in y=\dfrac{1}{2}$, $\Delta>0$

- $(x_1,g(x_1))$ το σημείο επαφής,
- $g'(x_1)g'(x_2)=-1$

1.38. α) Κ.Π. **β)** y=0

γ) $(0,0),\left(\dfrac{1}{\kappa\pi},0\right)$ $\mu\varepsilon\ \kappa\in Z^*$

δ) y= x στο $-\infty$ και στο $+\infty$

ε) $f'(x)=\begin{cases}2x\eta\mu\dfrac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0\\ 0 & ,\ x=0\end{cases}$

- δεν είναι συνεχής στο 0, με άτοπο

στ) $\left|\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|\leq\left|\dfrac{1}{x}\right|$

1.39. α) $f'(x)=3(x^2-1)$

- $f\nearrow(-\infty,-1],[-1,+\infty),\searrow[-1,1]$

β) Τ.Μ. για x=-1 με τιμή f(-1)=α+2

Τ.Ε. για x=1 με τιμή $f(1)=\alpha-2$

γ) Θ. Bolzano για f στο $[-1,1]$

και μονοτονία στο $[-1,1]$

δ)
- 1 ρίζα, αν α < -2 ή α >2
- 2 ρίζες ,αν α = ± 2
- 3 ρίζες ,αν -2 <α < 2

ε) $f(x)=x^3-3x+2$

- $f'(x)=3(x^2-1)$, $f''(x)=6x$
- ασύμπτωτες δεν έχει

στ) E= 27 / 4

1.40. α) y=3x-2

β) B(-2,-8) , f′(-2)=4 f′(1)

γ) E= 27 / 4

1.41. α) $f'(x)=\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x}$, $x>0$

γ) $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x} & ,\ x\geq 0\\ -\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{-x} & ,\ x<0\end{cases}$

$f(R)=[0,+\infty)$

δ) (0,0)

ε) 0

1.42. **β)** $f'(x)=\begin{cases}-6x & ,\ x<0\\ -3x^2+6x & ,\ x\geq 0\end{cases}$

- $f''(x)=\begin{cases}-6 & ,\ x<0\\ -6x+6 & ,\ x>0\end{cases}$

γ) $f\nearrow(-\infty,2],\searrow[2,+\infty)$ Ο.Μ. για x=2

δ) y = 1 **ε)** f κυρτή στο $[0,1]$,

- f κοίλη στα $(-\infty,0],[1,+\infty)$
- Σ.Κ. για x=0 και για x=1

στ) ασύμπτωτες δεν έχει

ζ) I= 7/4

1.43. α) y= x - 1 + f(1)

β) 3 ή -1

γ) 1 , $g'(x)=(2x+1)f'(x^2+x+1)$

1.44. α) $f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, $x>0$ **β)** όχι

γ) $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} & ,\ x>0\\ -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{-x}} & ,\ x<0\end{cases}$

$f\searrow(-\infty,0],\nearrow[0,+\infty)$

δ) 0

ε) i) 0 ii) 0

1.45. α) $f'(x)=\frac{1}{x}+1$

β) μηδέν για x=1,

αρνητική για 0<x<1, θετική για x>1

γ) $0<x<1$

δ) Για $x<0$ είναι $3^x>4^x$ …

ε) $x=0$

στ) i) A=0 ii) B=1

1.46. β) $y=x$

γ) Θ. Bolzano για τη συνάρτηση

$g(x)=(x-1)f(x)+e^x-2$ στο $[0,1]$

δ) -1

1.47. α) $f(x)=x^{lnx}=e^{ln^2x}$ $,x>0$

♦ $f'(x)=2\ln x\cdot x^{lnx-1},x>0$

β) i) $+\infty$ ii) $+\infty$

γ) $x=0$

δ) 1

1.48. α) $f(x)=(\ln x)^x=e^{xln(\ln x)}$ $,x>1$

$$f'(x)=(\ln x)^x\left[ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right],x>1$$

β) i) 0 ii) $+\infty$

γ) δεν έχει ασύμπτωτες

δ) 1 με Κ.Π.

1.49. β) i) 4 ii) 3

γ) A=8

δ) y = 4x-4 , E= 2

ε) 4

1.50. β) $f'(0)=1$

γ) $f'(x)=\begin{cases}2x+\sigma\upsilon\nu x, & x>0\\ 1 & , x\leq 0\end{cases}$

δ) $f''(x)=\begin{cases}2-\eta\mu x, & x>0\\ 0 & , x<0\end{cases}$

ε) i) $+\infty$ ii) 1